

## HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IV

99. a)  $6x \equiv 27 \pmod{33}$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{11}$$

$$2(-5) + 11 = 1$$

$$2(-45) + 11 \cdot 9 = 9$$

Vậy  $x \equiv -45 \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11}$

Suy ra nghiệm của phương trình ban đầu là

$$x \equiv -1 \pmod{33}, x \equiv 10 \pmod{33}, x \equiv 21 \pmod{33}.$$

b)  $10x \equiv 15 \pmod{65}$

Trước hết ta giải phương trình

$$2x \equiv 3 \pmod{13}$$

$$2 \cdot 7 - 13 = 1 \Rightarrow 2(21) - 13 \cdot 3 = 3$$

Vậy  $x \equiv 21 \equiv 8 \pmod{13}$ .

Suy ra nghiệm của phương trình đã cho là

$$x \equiv 8, x \equiv 21, x \equiv 34, x \equiv 47, x \equiv 60 \pmod{65}$$

c)  $15x \equiv 25 \pmod{70}$ .

Trước hết ta giải phương trình

$$3x \equiv 5 \pmod{14}$$

$$3 \cdot 5 - 14 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 25 - 14 \cdot 5 = 5$$

Vậy  $x \equiv 25 \equiv -3 \pmod{14}$ .

Suy ra phương trình đã cho có 5 nghiệm theo môđun 70 là

$$x \equiv -3, x \equiv 11, x \equiv 25, x \equiv 39, x \equiv 53 \pmod{70}$$

100. a)  $(a+b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab}$

Cách 1. Do  $a, b$  nguyên tố cùng nhau nên phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} (a+b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{a} \\ (a+b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv b \pmod{a} \\ x \equiv a \pmod{b} \end{cases}$$

Từ đó suy ra  $x \equiv a + b \pmod{ab}$ .

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$(a+b)x \equiv (a+b)^2 \pmod{ab}.$$

Do  $a+b, ab$  nguyên tố cùng nhau nên

$$x \equiv a + b \pmod{ab}$$

b)  $(a+b)^2 x \equiv a^2 - b^2 \pmod{ab} \quad (*)$

Cách 1.

$$(*) \Leftrightarrow (a+b)x \equiv a - b \pmod{ab}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)x \equiv a - b \pmod{a} \\ (a+b)x \equiv a - b \pmod{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bx \equiv -b \pmod{a} \\ ax \equiv a \pmod{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bx \equiv -b^{\varphi(a)} \pmod{a} \\ ax \equiv a^{\varphi(b)} \pmod{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv a^{\varphi(b)} - b^{\varphi(a)} \pmod{ab}.$$

Cách 2. Từ phương trình

$$(a+b)x \equiv a - b \pmod{ab}$$

ta thấy  $a+b$  nguyên tố cùng nhau với  $ab$  nên áp dụng định lý Ôle ta có

$$x \equiv (a-b)(a+b)^{\varphi(ab)-1} \pmod{ab}.$$

**101.**  $ax \equiv 1 \pmod{p}$

Do  $p$  nguyên tố và  $a$  không chia hết cho  $p$  nên  $a$  và  $p$  nguyên tố cùng nhau.

Áp dụng định lý Ôle ta có

$$x \equiv a^{\varphi(p)-1} \pmod{p}.$$

**102.** a)  $11x + 25y = 30$

Xét phương trình đồng dư

$$25y \equiv 30 \pmod{11}, \text{ hay}$$

$$3y \equiv -3 \pmod{11}.$$

Do  $(3, 11) = 1$  nên

$$y \equiv -1 \pmod{11}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} y = -1 + 11t \\ x = 5 - 25t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

b)  $79x - 13y = 27$

Xét phương trình đồng dư

$$79x \equiv 27 \pmod{13}$$

$$x \equiv 1 \pmod{13}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x = 1 + 13t \\ y = 4 + 79t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

**103.** Giải và biện luận phương trình

$$15x - 20y = 2m - 1.$$

Ta có  $(15, 20) = 5$ , do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi  $2m - 1$  chia hết cho 5, hay

$$2m \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow 2m \equiv 6 \pmod{5} \Leftrightarrow m \equiv 3 \pmod{5}.$$

Như vậy  $m$  có dạng  $5k + 3$  và phương trình đã cho có dạng

$$3x - 4y = 2k + 1 \quad (*)$$

Phương trình  $3x - 4y = -1$  có nghiệm riêng  $(1, 1)$  nên phương trình  $(*)$  có nghiệm riêng  $x_0 = -2k - 1, y_0 = -2k - 1$  và do đó nghiệm tổng quát của  $(*)$  là

$$\begin{cases} x = -2k - 1 + 4t \\ y = -2k - 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

**104.** Xét phương trình

$$x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Cho  $x$  chạy qua hệ thặng dư đầy đủ môđun 13

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$$

thì  $x^2 - 2$  chạy qua tập

$$\{-2, -1, 2, 7, 14, 23, 34\}.$$

Không có số nào trong tập này chia hết cho 13 nên phương trình trên vô nghiệm, hay  $a^2 - 2$  không chia hết cho 13 với mọi  $a \in \mathbb{Z}$ .

**105.** a) Ta có thể đưa việc giải phương trình

$$5x^2 - 7 = 11y$$

về việc giải phương trình đồng dư

$$5x^2 - 7 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 5x^2 \equiv -15 \pmod{11}$$

$$x^2 \equiv -3 \pmod{11}$$

Cho x chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ môđun 11

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$$

thì  $x^2 + 3$  chạy qua tập

$$\{3, 4, 7, 12, 19, 28\}.$$

Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm

$$b) 3x^2 - 2x = 17y \Leftrightarrow x(3x - x) = 17y$$

Nếu  $x = 17k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  thì  $y = 51k^2 - 2k$ .

Nếu  $3x - 2 \vdots 17$  thì

$$3x \equiv 2 \equiv 36 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow x \equiv 12 \equiv -5 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow x = 17k - 5.$$

Từ đó

$$17y = (17k - 5)(51k - 17)$$

$$\Rightarrow y = (17k - 5)(3k - 1)$$

$$= 51k^2 - 32k + 5.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

$$\begin{cases} x = 17k \\ y = 51k^2 - 2k \end{cases}, \begin{cases} x = -5 + 17k \\ y = 51k^2 - 32k + 5 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**106. a)**  $x^3 + 1 = 11y$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 11y.$$

Trường hợp 1:  $x+1 = 11k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Khi đó

$$y = 121k^3 - 33k^2 + 3k.$$

Trường hợp 2:  $x^2 - x + 1 = 11k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x(x-1) \equiv -1 \pmod{11}.$$

Cho x chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ môđun 11

$$\{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

ta thấy  $x(x-1) \not\equiv -1 \pmod{11}$ .

Vậy phương trình có một họ nghiệm

$$\begin{cases} x = -1 + 11k \\ y = 121k^3 - 33k^2 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $x^3 + 2x + 7y + 9 = 0$ .

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x + 9 \equiv 0 \pmod{7} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x + 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 1) \equiv 0 \pmod{7}.$$

Trường hợp 1:  $x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$ . Suy ra

$$\begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = -3 - 14k - 42k^2 - 49k^3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Trường hợp 2:  $x^2 + 2x - 1 \equiv 0 \pmod{7}$

$$x(x+2) \equiv 1 \pmod{7} \quad (**)$$

Cho x chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ môđun 7

$$\{0, 1, 2, \dots, 6\}$$

ta có  $x \equiv 3 \pmod{7}$  và  $x \equiv 2 \pmod{7}$  là nghiệm của (\*\*). Từ đó

$$\begin{cases} x = 3 + 7k \\ y = -6 - 29k - 63k^2 - 49k^3, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = -3 - 14k - 42k^2 - 49k^3, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

*Chú ý.* Ta có thể giải phương trình (\*) bằng cách thử với  $x$  chạy qua một hệ thặng dư đầy đủ.

**107.** 
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$$

*Cách 1.* Với  $m_1 = 7$ ,  $m_2 = 11$  ta đặt  $M_1 = 11$ ,  $M_2 = 7$ .

Khi đó các phương trình đồng dư

$$11x \equiv 1 \pmod{7}$$

$$7x \equiv 1 \pmod{11}$$

cho nghiệm tương ứng là  $x \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $x \equiv -3 \pmod{11}$ .

Suy ra nghiệm của hệ là

$$x \equiv 11.2.5 + 7.(-3).7 \equiv -37 \pmod{77}.$$

*Cách 2.*

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 11t \\ 7 + 11t \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình (\*) tương đương với

$$4t \equiv -2 \pmod{7} \Leftrightarrow 2t \equiv -1 \equiv 6 \pmod{7} \Leftrightarrow t \equiv 3 \pmod{7}.$$

Vậy

$$x = 7 + 11(7k + 3) = 40 + 77k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ hay } x \equiv 40 \pmod{77}$$

**108.** 
$$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{7} \\ 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 5x \equiv 1 \pmod{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{35} \\ x \equiv 2 \pmod{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 35t \\ 4 + 35t \equiv 2 \pmod{9} \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình (\*) ta có

$$-t \equiv -2 \pmod{9}, \text{ hay } t = 2 + 9k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy

$$x = 4 + 35(2 + 9k) = 74 + 315k, \text{ hay}$$

$$x \equiv 74 \pmod{315}.$$

**109.** Gọi số nguyên phải tìm là  $x$  ta có

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{12} \end{cases}$$

Suy ra

$$1 + 12t \equiv 0 \pmod{5}$$

$$2t \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$t \equiv 2 \pmod{5}.$$

Vậy  $t = 2 + 5k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  và khi đó

$$x = 1 + 12t = 1 + 12(2 + 5k) = 25 + 60k.$$

$$110. a) \begin{cases} x \equiv a \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 8t \\ 1 + 8t \equiv a \pmod{6} \end{cases} (*) \text{ với } t \in \mathbb{Z}$$

Từ phương trình (\*) ta có

$$2t \equiv a - 1 \pmod{6}$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi  $a - 1$  chia hết cho 2, tức là  $a = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó

$$2t \equiv 2k \pmod{6}$$

$$t = k + 3m, m \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra

$$x = 1 + 8(k + 3m) = 1 + 8k + 24m, \text{ hay}$$

$$x \equiv 1 + 8k \pmod{24} \text{ (với } a = 2k + 1).$$

$$b) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv a \pmod{8} \end{cases}$$

Suy ra

$$a + 8t \equiv 2 \pmod{6}$$

$$2t \equiv 2 - a \pmod{6}.$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi  $a = 2k$ . Khi đó

$$t \equiv 1 - k \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x \equiv 8 - 6k \pmod{24}.$$

$$c) \begin{cases} 2x \equiv a \pmod{4} \\ 3x \equiv 4 \pmod{10} \end{cases}$$

$$3x \equiv 4 \equiv -6 \pmod{10} \Rightarrow x \equiv -2 \pmod{10}.$$

Từ đó suy ra

$$2(-2 + 10t) \equiv a \pmod{4} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{4}.$$

Vậy  $x \equiv -2 \pmod{10}$  với  $a = 4k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$111. a) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 11 \pmod{20} \\ x \equiv 1 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 11 \pmod{20} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(do  $x \equiv 11 \pmod{20}$  thì  $x \equiv 1 \pmod{5}$ ).

Ta có

$$11.20.3 = 11.60 = 20.33 = 220.3.$$

Xét các phương trình đồng dư

$$60y \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow y_1 \equiv -2 \pmod{11}$$

$$33y \equiv 1 \pmod{20} \Rightarrow y_2 \equiv -3 \pmod{20}$$

$$220y \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y_3 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Do đó hệ đã cho có nghiệm là

$$x \equiv 60.(-2).3 + 33.(-3).11 + 220.1.1 \pmod{660}$$

$$\Rightarrow x \equiv 91 \pmod{660}.$$

$$b) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 7 \pmod{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

$$(\text{do } x \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow x \equiv 1 \equiv 7 \pmod{2}).$$

Ta có

$$12.5.7 = 12.35 = 5.84 = 7.60.$$

Xét các hệ phương trình

$$35y \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow y_1 \equiv -1 \pmod{12}$$

$$84y \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow y_2 \equiv -1 \pmod{5}$$

$$60y \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow y_3 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Do đó hệ đã cho có nghiệm

$$x \equiv 35.(-1).1 + 84.(-1).4 + 60.2.7 \pmod{420}$$

$$\equiv 49 \pmod{420}.$$